Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen, Cristina SABENA, Turin, Ferdinando ARZARELLO, Turin

„Lost in translation“ - Semiotisch-theoretische Kontrolle beim argumentativen Problemlösen

Der zielgerichtete Umgang mit semiotischen Systemen ist schwer, nicht nur in der elementaren Algebra, sondern vor allem in Gebieten der Sekundarstufe II. Mit dem Konzept semiotisch-theoretischer Kontrolle in epistemischen Prozessen sollen diese Probleme untersucht und geklärt werden.

Kontrolle üben Lernende aus, wenn sie angemessene Entscheidungen in Problemlöseprozessen treffen können, d.h. “global decisions regarding the selection and implementation of resources and strategies” (Schoenfeld 1985, p. 15). Diese Entscheidungen betreffen semiotische Mittel, “when the decisions concern mainly the selection and implementation of semiotic resources”. Sie sind theoretischer Natur “when the decisions concern mainly the selection and implementation of a more or less explicit theory or parts of it […]. For example, a semiotic control is necessary to choose a suitable semiotic representation for solving a task (e.g. an algebraic formula vs. a Cartesian graph), while a theoretic control intervenes when a subject decides to use a theorem of Calculus or of Euclidean Geometry for supporting an argument” (Arzarello und Sabena 2011, S. 191). Inhaltlich beziehen sich diese Entscheidungen auf “conceptual frames”, das sind “organized set[s] of notions (i.e. mathematical objects, their properties, typical algorithms to use with them, usual arguing strategies in such a field of knowledge, etc.), which suggest(s) them [the students] how to reason, manipulate formulas, anticipate results” (Arzarello, Bazzini, and Chiappini 1995, p. 122). Diese “frames” werden mit semiotischen Mitteln dargestellt und erschließen sich Lernenden durch Interpretationen im epistemischen Handeln. Dabei fassen wir Erkenntnisprozesse als soziale Prozesse gemeinsamen Problemlösens auf und modellieren sie mit einem epistemischen Handlungsmodell, das die kollektiven epistemischen Handlungen Sammeln und Verknüpfen mathematischer Bedeutungen als Basis für das Erfassen mathematischer Strukturen (Struktursehen) unterscheidet (Bikner-Ahsbahs 2005, S. 207 ff.).

Methodologie

In einer Interview-Fallstudie weisen zwei besonders leistungsstarke Schülerinnen (R und L) der Klasse 10 nach, dass der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt, dem Brennpunkt B, und einer Leitgeraden g gleich weit entfernt sind, eine Parabel bildet. Dieses Interview wurde videographiert, transkribiert und anschließend gemäß der Frage analysiert,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 185–188). Münster: WTM-Verlag

warum semiotisch-theoretische Kontrolle in diesem Fall z.T. nur mit massiver Unterstützung des Interviewers ausgeübt werden kann. In diesem Interview bearbeiten die beiden Mädchen folgende Aufgabenstellung.

Aufgabenstellung (verkürzt):

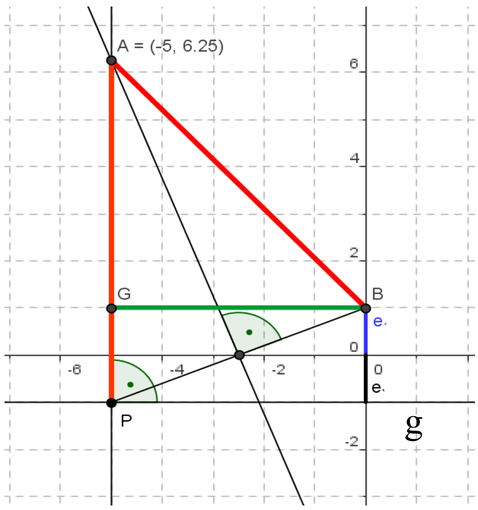

Abb. 1: Geogebra Arbeitsblatt

Der Punkt B und die Gerade g sind fest. P bewegt sich auf g. A ist Schnittpunkt zwischen der Mittelsenkrechten von PB und der Senkrechten auf g durch P. A ist Spurpunkt einer Kurve [der Parabel].

a. Markiere den Abstand zwischen A und B sowie den Abstand zwischen A und der Geraden g.
b. Stelle eine Vermutung auf.
c. Begründe deine Vermutung.
d. Welche Kurve hast du in der obigen Aufgabe erkannt?
e. Wie würdest du jemand anderen von deiner Vermutung mit dem, was du bisher herausgefunden hast, überzeugen?

Ergebnisse

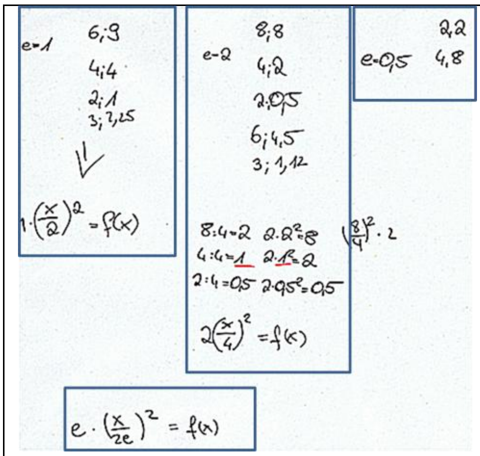

Abb. 2: Conceptual frame 1

Die Lernenden vermuten, dass hier eine Parabel vorliegt. Sie variieren A auf dem Geogebra-Arbeitsblatt und entnehmen ihm Koordinaten für verschiedene Werte von e. In Abb. 2 erkennt man, dass sie e gezielt verändern, die Koordinaten gezielt auswählen und für e=1 und e=2 Funktionsgleichungen aufstellen. Mittels verschiedener Koordinaten für e=0,5 und der beiden Gleichungen wird abschließend eine Gleichung des Funktionsgraphen in Abhängigkeit von e aufgestellt.

Die Lernenden konstituieren den „conceptual frame 1" des *Parabelterms als verallgemeinerte arithmetische Beziehung von Zahlenpaaren*. Damit haben sie jedoch die Frage e. (Abb. 1) nicht beantwortet. Erst wiederholte Hinweise des Interviewers I (Verschriftlichung des phonetischen Ausdrucks s.u.) machen es den Lernenden möglich, die geometrische Konstruktion zu nutzen, um den algebraischen Term daraus zu gewinnen:

754 I: Okay. (*R schaut I an, lächelt*) (..) ‚ist das jetz allgemeingültich

766 I: Mein Vorschlag wär jetz dass ihr euch jetz nochmal ,eine von diesn Zeichnung ankuckt, …. (..) ,und jetz (*zeigt auf A, wackelt dabei leicht mit dem Finger*) hier allgemein- ,annehmt. ,dass dieser- (.) Punkt. A' die Koordinaten x y hat. ….

834 I: Das mach ich dann mal i-n- (.) rot' … ,das is da noch nich so viel drin' (4sec) also ich zeichne jetzt (*zeichnet eine Verbindungslinie zwischen A und dem mit "G" beschrifteten Punkt auf der y-Achse, siehe Abb. 3*) ,hier noch eine- Linie. (..) … ,und jetzt- (*setzt Kappe auf Stift*) (.) könnt ihr euch mal- (*kreist mit dem Stift um das neu entstandene Dreieck*) dieses Dreieck hier ankuckn. … (.) ,und kuckn was davon … (.) euch bekannt is. …. (6sec) (*L greift nach dem Stift, gleichzeitig zeigt R auf den rechten Winkel*)

837 Rosa: Kann man da jetz … irgenwas mitm Pythagoras anfang, …. ,da ham wir jetz ja zumindest (*schaut kurz zu I*) schonma n Quadrat drin und (*zeigt auf die mit "y-e" beschriftete Strecke*) weil das die Hypotenuse (*zeigt auf die mit "y" beschriftete Strecke*) is' (*Lisa markiert den rechten Winkel im Dreieck*) (..)

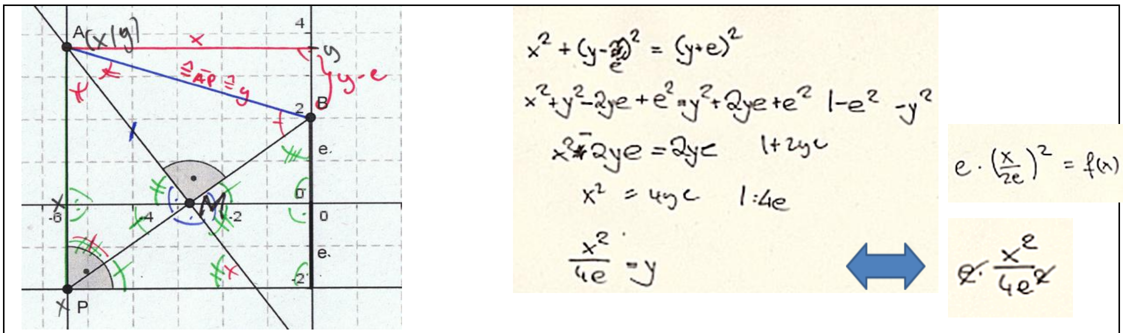

Abb. 3: Conceptual frame 2 und globale semiotisch-theoretische Kontrolle

Der Interviewer weist darauf hin, dass noch etwas zu beweisen ist (754, 766) und stellt so die Verbindung zur geometrischen Konstruktion her (834). Zuvor zeigen Rosa und Lisa, dass sie lokal, das heißt innerhalb des „conceptual frame“ 2 (*geometrische Beziehungen zur Parabelkonstruktion* (Kurve)) gezielt geometrische Beziehungen finden können. Aber erst in Zeile 837 aktiviert Rosa eine semiotisch-theoretische Kontrolle, die beide Frames miteinander verbindet und den Nachweis erbringt, dass durch diese Konstruktion in der Tat eine Parabel vorliegt.

Wir können hier zwei Arten semiotisch-theoretischer Kontrolle beobachten: lokal innerhalb der beiden „conceptual frames“ und eine globale Kontrolle, die beide Rahmen miteinander verbindet. Diese globale semiotisch-theoretische Kontrolle ist offenbar schwer zu erringen, denn es ist der Interviewer, der wiederholt initiativ wird. Warum ist dies so schwer? Um das zu klären, wird auf die Theorie des „conceptual blending“ (Fauconnier & Turner, 2003) zurückgegriffen und diese semiotisch und nicht wie üblich kognitiv gedeutet. Damit kann der hier vorliegende kreative Akt charakterisiert und die spezifische Schwierigkeit identifiziert werden.

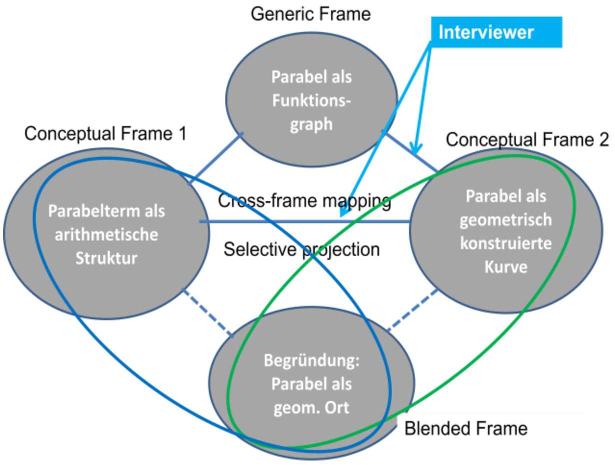

Abb. 4: Four-frame-model (in Anlehnung an Fauconnier und Turner (2003, S. 102)

Innerhalb der „conceptual frames“ ist semiotisch-theoretische Kontrolle (lokal) aktivierbar, aber nicht global zwischen den Bereichen. Eine Verbindung wird nur in eine Richtung durch die Auswahl der Koordinaten der Punkte der Kurve, die in „frame“ 1 genutzt werden, aktiviert. Die andere Richtung (die Gleichungen in frame 1 auch aus der geometrischen Konstruktion zu gewinnen) legt der Interviewer nahe. Erst dann sind die Lernenden in der Lage Inhalte aus beiden „frames“ zu überlagern und einen „blended frame“ als Begründungsrahmen zu bilden.

Nach Fauconnier & Turner (2003, S. 102) ist die Bildung eines „blended frame“ durch selektive Projektionen dann möglich, wenn es einen generischen „frame“ gibt, d.h. eine Idee, die zu beiden Bereichen gehört, und genügend Beziehungen zwischen frame 1 und 2 erzeugt werden. Die Parabel als Funktionsgraph ist eine solche generische Idee, die in der Aufgabe angelegt ist. In „frame“ 2 ist sie hypothetisch als Kurve realisiert. In „frame“ 1 wird sie durch die Koordinaten der Punkte auf dieser Kurve erzeugt. Globale semiotisch-theoretische Kontrolle scheint hier deshalb schwer zu sein, weil diese erst in wechselseitiger Abhängigkeit zusammen mit dem „conceptual blending“ aufgebaut werden muss.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Interesse zwischen Subjekt und Situation. Empirisch begründete Entwicklung einer Theorie interessendichter Situationen*. Verlag Franzbecker.

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics* 77,189–206.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1995). The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proc. 19th PME Conference*, (vol. 1, pp. 119-134). Recife, Brazil: PME.

Fouconnier, G. & Turner, M. (2003). Conceptual blening. Recherches en communicatio 19, 57-86.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic.